Institute for Design and Control
of Mechatronical Systems

Masterarbeit

Approximation einer optimalen Regelung mittels Anpassung einer CLF für eine Klasse von nichtlinearen Systemen

Autor: Hannes Rohrweck

Betreuung: Prof. Dr. Luigi del Re
Dipl.-Ing. Thomas Schwarzgruber

Fertigstellung: November 2014

Kurzfassung

Die vorliegende Masterarbeit beschäftigt sich mit Optimierungsproblemen und deren Lösungen auf Basis der nichtlinearen partiellen *Hamilton Jacobi Bellman* (*HJB*) Differentialgleichung und so genannten *control Lyapunov functions*. Dabei werden die strukturellen Ähnlichkeiten von *CLF*s und *Value* Funktionen (den Lösungen von *HJB* Gleichungen) näher untersucht. In der Literatur [a] wurde bereits gezeigt, dass eine *CLF* die Lösung eines Optimierungsproblems mit nicht näher spezifizierter Kostenfunktion darstellt. Mit Hilfe der direkten Verbindung von *CLF*s und *Value* Funktionen werden Methoden vorgestellt, die durch Lösen des *inversen* Problems und Anpassung der laufenden Kosten in diesem Problem an die Struktur des ursprünglich gegebenen Optimierungsproblems eine Berechnung von Näherungslösung für den optimalen Regler ermöglichen. Die Approximation selbst ist ebenfalls optimal im Bezug auf eine möglichst ähnliche Kostenfunktion, verglichen mit der des ursprünglichen Optimierungsproblems.

[a] Freeman, R. A. ; Kokotovic, P. V.: Robust nonlinear control design: state-space and Lyapunov techniques. Springer, 2008

Ausgangsbasis

Ausgehend von der klassischen Formulierung von Optimierungsproblemen über eine Kostenfunktion, welche es über u zu Minimieren gilt, kann mittels Optimalitätsprinzip von *Bellman* die so genannte *Hamilton - Jacobi - Bellman* Gleichung angeschrieben werden.

- Optimierungsproblem

$$\min_u \quad J(x_0, u) = \int_0^\infty q(x) + r(x)u^2 \, \mathrm{d}t, \qquad q(x), r(x) > 0$$

$$\text{s.t.} \quad \dot{x} = f(x) + g(x)u, \qquad x(0) = x_0$$

$$V^*(x(t), t) = \min_u \int_t^\infty q(x) + r(x)u^2 \, dt$$

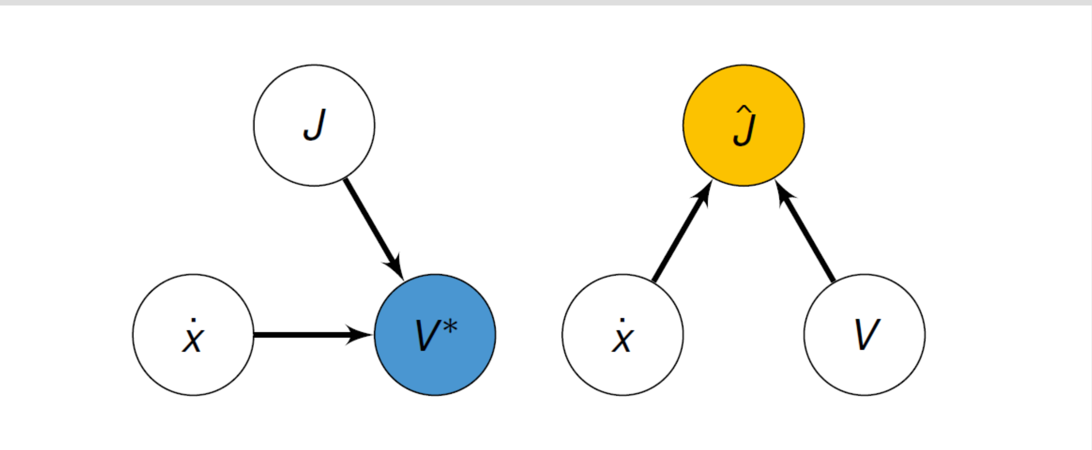
- Das minimierte Integral wird als *Value - Function* V^* bezeichnet (optimal cost-to-go).
- Mittels Optimalitätsprinzip von Bellman erhält man die Hamilton - Jacobi - Bellman (HJB) Gleichung:

$$\min_u \{q(x) + r(x)u^2 + V_x^* \cdot f(x) + V_x^* \cdot g(x) \cdot u\} = 0$$

- Die HJB - Gleichung ist eine nichtlineare partielle Differentialgleichung deren Lösung die *Value* Funktion darstellt. Für solche Arten von Differentialgleichungen existiert bis dato nur eine lückenhafte analytische Lösungstheorie ⇒ Näherungslösungen.

Grundidee

Da sich das analytische Lösen der *HJB* Gleichung im Allgemeinen als praktisch unmöglich herausstellt, werden in dieser Arbeit Näherungslösungen zum Optimierungsproblem gesucht.



- **Klassische Vorgehensweise** (linkes Bild): Es wird die Kostenfunktion J vorgegeben und unter Berücksichtigung der Systemdynamik $\dot{x}$ die *Value* Funktion V^* gesucht. Eine analytische Lösung gestaltet sich hier sehr schwierig.
- **Näherungsansatz durch *inverses* Problem** (rechtes Bild): Eine *CLF* ist eine *Value* Funktion für ein Optimierungsproblem mit unbekannter Kostenfunktion $\hat{J}$. In diesem Problem ist zu gegebener *CLF* und Systemdynamik $\dot{x}$ die zugehörige Kostenfunktion $\hat{J}$ gesucht. Falls es durch Einbringen von Parametern über V gelingt $\hat{J} = J$ zu erreichen, ist die optimale Lösung gefunden.

Spezielles 1D - Optimierungsproblem

Für eine Näherung der Lösung eines Optimierungsproblems muss zunächst das *inverse* Problem gelöst werden, um eine Berechnungsvorschrift für $\hat{J}$ zu erhalten. Dazu wird nachfolgendes 1D - Optimierungsproblem vorgestellt.

Vorbereitende Überlegungen

- *HJB* Gl. für 1D relativ leicht lösbar, Kenntnis V_x^* genügt für u^*
- Idee: mehrdimensionale Systemdynamik $\dot{x}$ auf charakteristische 1D Differentialgleichung abbilden und Ersatzproblem lösen.

Ersatzproblem

- charakteristische 1D Differentialgleichung: $\dot{V}(t) = V_x f(x) + V_x g(x)u$
- Das 1D - Optimierungsproblem ergibt sich somit zu:

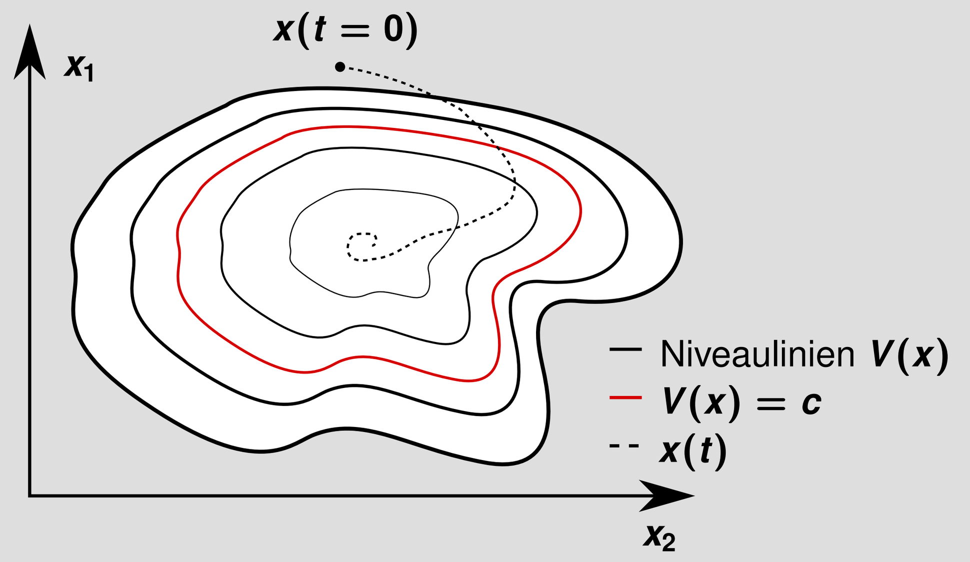
$$\min_u \quad J = \int_0^\infty q(V) + r(V)u^2 \, \mathrm{d}t \qquad q(V), r(V) > 0$$

$$\text{s.t.} \quad \dot{V} = V_x f(x) + V_x g(x)u$$

Grafische Interpretation

Der Verlauf der Werte von $V(t)$ wird durch das Optimierungsproblem $(q(V), r(V))$ vorgegeben. Da V eine *CLF*, sowie eine reine Funkion von x ist, wird dadurch indirekt der Verlauf der Bereiche in denen sich x aufhalten kann vorgegeben. Falls z.B.: $V(x) = c$ gilt, so kann sich das System ausschließlich auf einer Niveaulinie von V bewegen.

Durch geschickte Vorgabe des Verlaufes von $V(t)$ entstehen (sub)optimale Systemverläufe.



Lösung des *inversen* Problems

Durch einen Vergleich der Struktur bzw. der auftretenden Terme in einem Regelgesetz, welches aus dem 1D - Ersatzoptimierungsproblem entsteht, mit der Struktur des optimalen Reglers aus einem gegebenen Optimierungsproblem, kann ein Ansatz für die laufenden Kosten von $\hat{J}$ gefunden werden. Daraus ergibt sich:

$$r_{inv}(x) = \frac{1}{2}\frac{(V_x g(x))^2}{\underbrace{V_x f(x) + \sqrt{(V_x f(x))^2 + r^{-1}(V)q(V)(V_x g(x))^2}}_{p.d.(\text{CLF Eigenschaften})}}$$

Das $q_{inv}(x)$ kann einfach über die zugehörige *HJB* Gleichung berechnet werden und lautet:

$$q_{inv}(x) = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{(V_x f(x))^2 + r^{-1}(V)q(V)(V_x g(x))^2} - V_x f(x)\right) > 0$$

Das gesamte Optimierungsproblem inkl. $\hat{J}$ stellt sich zusammenfassend wie folgt dar:

$$\min_u \quad \hat{J} = \int_0^\infty q_{inv}(x) + r_{inv}(x)u^2 \, \mathrm{d}t \qquad \text{s.t.} \quad \dot{x} = f(x) + g(x)u$$

Näherungsverfahren

Um die Kostenfunktion $\hat{J}$ an ein gegebenes J anzupassen, ist es notwendig Freiheitsgrade bzw. Parameter in die zur Berechnung von $\hat{J}$ verwendete *CLF* V einzubringen. Dies kann auf mehrere Arten erfolgen:

- in der Konstruktionsphase der *CLF*
- in das Optimierungsproblem durch $r(V), q(V)$
- durch Abbildung: $V(x) = p_1 V_1(x)^{p_2}, \quad p_1, p_2 > 0$

Diese Parameter werden durch numerische Optimierung mittels *interior point* Algorithmus an ein gegebenes Optimierungsproblem angepasst. Dabei stellen sich zwei Varianten zur Auswahl:

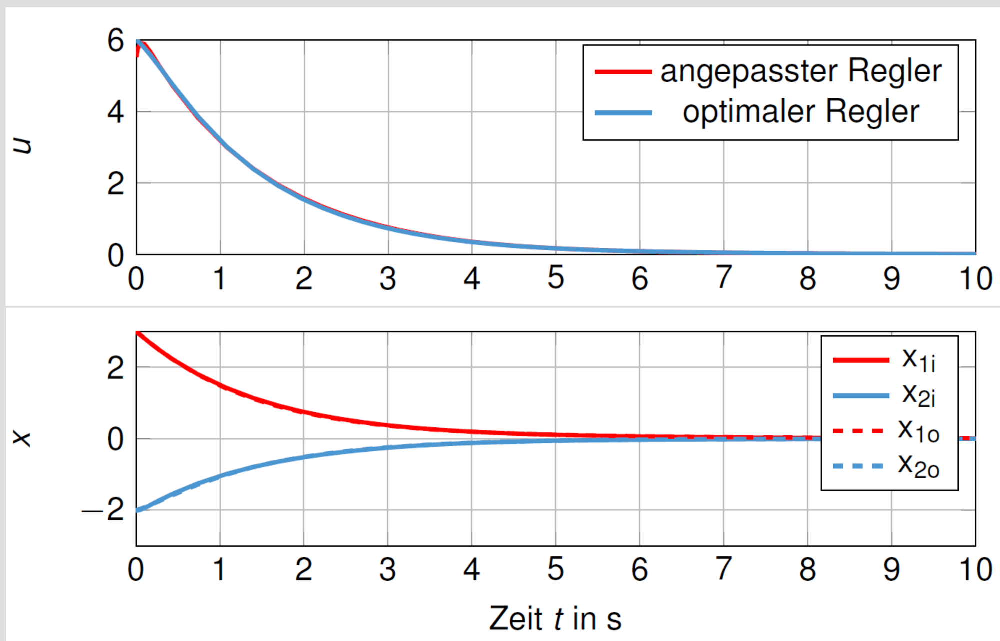
- Methode 1: Formabgleich der laufenden Kosten
- Methode 2: Minimierung d. Kostenfunktion J

Anwendung der Resultate

Beispiel aus der Literatur[a]: Angepasst wurde nach Methode 2 für die Trajektorie startend bei x_0.

$$\min_u \quad J = \int_0^\infty x_2^2 + u^2 \, \mathrm{d}t, \qquad x_0 = [3, -2]^T$$

$$\text{s.t.} \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1\left(\tfrac{\pi}{2} + \arctan(5x_1)\right) - \frac{5x_1^2}{2(1 + 25x_1^2)} + 4x_2 + 3u$$



[a] Primbs, J. A. et al.: *Nonlinear optimal control: A control Lyapunov function and receding horizon perspective*

Zusammenfassung und Ausblick

Zusammenfassung

- Es konnte das *inverse* Problem mittels speziellem 1D - Optimierungsproblem gelöst werden.
- Durch Anpassen der Freiheitsgrade in einer *CLF* können für alle nichtlinearen Systeme, für die eine *CLF* konstruiert werden kann, Näherungslösungen für ein gegebenes Optimierungsproblem, welche selbst in einem gewissen Sinne optimal sind, angegeben werden.

Weiterführende Themen

- Praktische Implementierung an einem realen System
- Untersuchungen zu abgewandelten 1D - Ersatzoptimierungsproblemen
- Erweiterungen in der Anpassung der *CLF*