Analyse verschiedener Metriken zur System-Identifikation

Klaus Zauner

September 24, 2019

Themen der Arbeit

- ✓ Datenbasierte Modellbildung
- ✓ LS-Schätzer, BLUE-Bedingungen
- ✓ L_1- und L_∞-Schätzer
- ✓ Analyse der alternativen Schätzer auf Basis von Simulationsstudien

Kapitel

- ✓ Theorie
- ✓ Simulationsstudien: Parametrische Modelle
- ✓ Simulationsstudie: Tankmodell
- ✓ Zusammenfassung

LS-Schätzer, BLUE-Bedingungen

Mit Eingangsdaten $\mathbf{U} = [u_1,\, u_2,\, \ldots\, u_k,\, \ldots\, u_N] \in \mathbb{R}^N$ und Ausgangsdaten $\mathbf{Y} = [y_1,\, y_2,\, \ldots\, y_k,\, \ldots\, y_N] \in \mathbb{R}^N$ eines zu identifizierenden Systems, sowie einer gewählten Modellstruktur

$$\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{\Phi}\hat{\mathbf{\Theta}} + \mathbf{e}, \tag{1}$$

mit der Störung $\mathbf{e} = [e_1,\, e_2,\, \ldots\, e_k,\, \ldots\, e_N] \in \mathbb{R}^N$, ergeben sich deren unbekannte Parameter $\hat{\mathbf{\Theta}}$ unter Verwendung des LS-Schätzers zu

$$\hat{\mathbf{\Theta}} = (\mathbf{\Phi}^T\mathbf{\Phi})^{-1}\mathbf{\Phi}^T\mathbf{Y}. \tag{2}$$

LS-Schätzer, BLUE-Bedingungen

- ✓ BLUE – **b**est **l**inear **u**nbiased **e**stimator
- ✓ best – geringste Varianz der Parameterschätzung
- ✓ unbiased – Erwartungstreue, d.h. $E\{\hat{\mathbf{\Theta}}\} = \mathbf{\Theta}$

Die BLUE-Bedingungen sind:

1. System- und Modellstruktur stimmen überein
2. Anzahl der Daten $N \rightarrow \infty$
3. $E\{(\varphi_i\varphi_i^T)^{-1}\} \neq 0$ – die Hessematrix ist Invertierbar
4. $E\{\mathbf{e}\} = 0$ – mittelwertfreie Störung
5. $E\{\varphi_i e_i\} = 0$ – Regressor und Störung sind unkorreliert

alternative Schätzer

LS-Schätzer:

$$\hat{\boldsymbol{\Theta}} = \arg\min_{\boldsymbol{\Theta}} V_2(\boldsymbol{\Theta}) = \arg\min_{\boldsymbol{\Theta}} \frac{1}{2}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\Phi\Theta})^T(\mathbf{y} - \boldsymbol{\Phi\Theta}) \tag{3}$$

- ✓ L_1-Schätzer

$$\hat{\boldsymbol{\Theta}} = \arg\min_{\boldsymbol{\Theta}} V_1(\boldsymbol{\Theta}) = \arg\min_{\boldsymbol{\Theta}} \sum_{i=1}^{N} |r_i(\boldsymbol{\Theta})| \tag{4}$$

- ✓ L_∞-Schätzer

$$\hat{\boldsymbol{\Theta}} = \arg\min_{\boldsymbol{\Theta}} V_\infty(\boldsymbol{\Theta}) = \arg\min_{\boldsymbol{\Theta}} \max |r_i(\boldsymbol{\Theta})| \tag{5}$$

alternative Schätzer - lineares Programm

Die Optimierungsprobleme zu L_1- und L_∞-Schätzer können als lineare Programme der Form

$$\min_{\mathbf{x}} \mathbf{f}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}, \text{ mit Nebenbedingungen } \begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{A}_{eq}\mathbf{x} = \mathbf{b}_{eq} \\ \mathbf{x}_{min} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_{max} \end{cases} \tag{6}$$

fomuliert und mit MatLab *linprog* gelöst werden.

Studien an parametrischen Modellen

- ✓ PNFIR:

$$y_k = 0,1 + 0,1u_k + 0,1u_{k-1} - 0,5u_k^2 - 0,2u_k u_{k-1} + 0,1u_{k-1}^2 + 0,4u_k^3$$
$$+ 0,5u_k^2 u_{k-1} - 0,2u_k u_{k-1}^2 + 0,2u_{k-1}^3 + e_k \qquad (7)$$

- ✓ PNARX:

$$y_k = 0,5y_{k-1} + 0,3u_{k-2} + 0,3u_{k-1}y_{k-1} + 0,5u_{k-1}^3 + e_k \qquad (8)$$

- ✓ OE:

$$y_k = u_{k-1} - 0,25y_{k-1} + e_k + 0,25e_{k-1} \qquad (9)$$

Studien an parametrischen Modellen: Störungen

- ✓ MWN – mittelwertfreies, weißes Rauschen, keine Verletzung
- ✓ WN – weißes Rauschen mit Mittelwert, Verletzung: 4
- ✓ CN – farbiges Rauschen, Verletzung: 5
- ✓ MWN + Peak – mittelwertfreies, weißes Rauschen + Störspitzen, Verletzung: 4

Studien an parametrischen Modellen: Ablauf

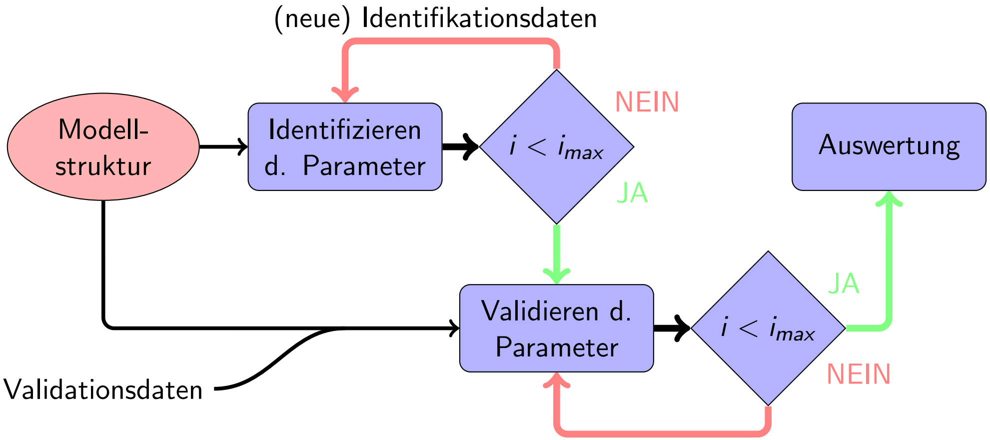

Figure: Ablaufdiagramm: Studien an parametrischen Modellen

Studien an parametrischen Modellen: PNFIR

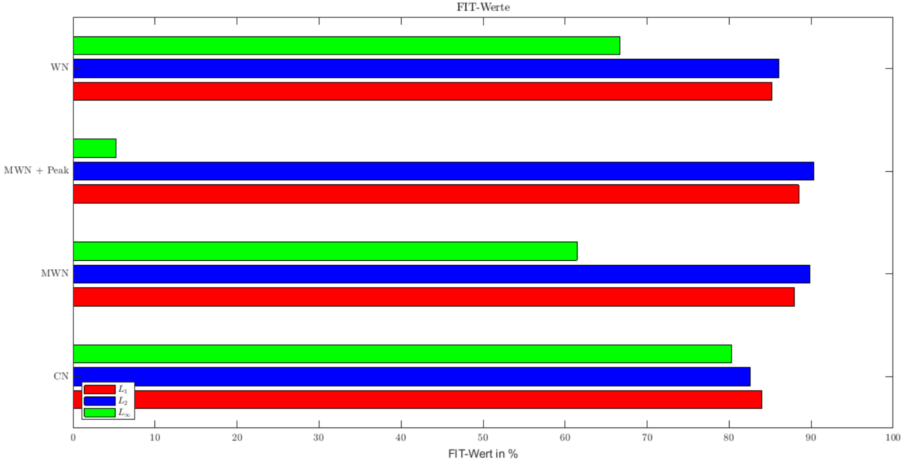

Figure: grafische Gegenüberstellung: über $n = 100$ Validationen gemittelte FIT-Werte

Studien an parametrischen Modellen: PNARX

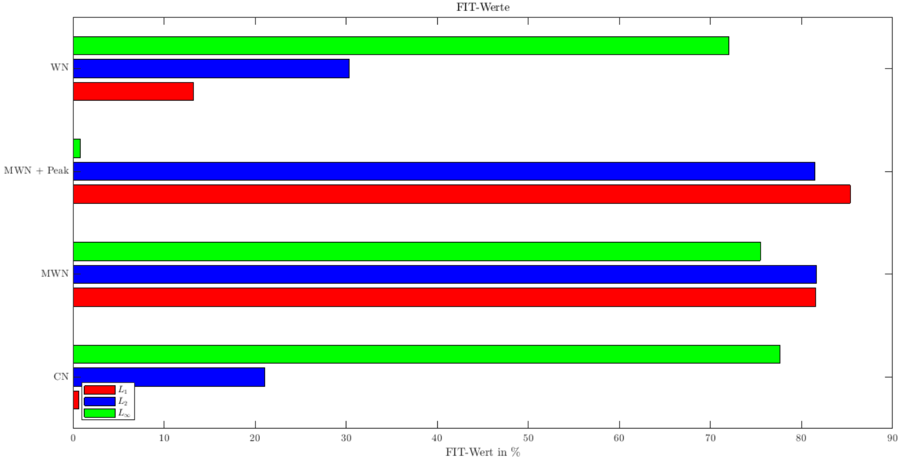

Figure: grafische Gegenüberstellung: über $n = 100$ Validationen gemittelte FIT-Werte

Studien an parametrischen Modellen: OE

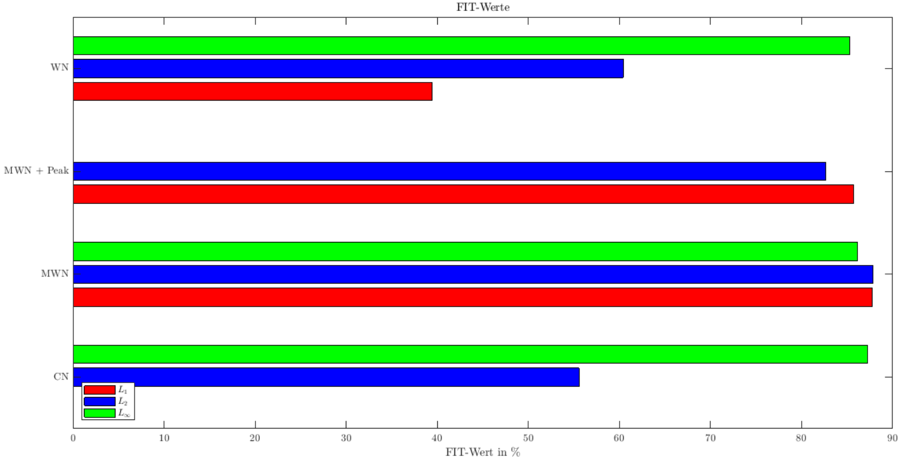

Figure: grafische Gegenüberstellung: über $n = 100$ Validationen gemittelte FIT-Werte

Studie an einem realistischen System-/Simulationsmodell: Tankmodell

zeitdiskrete Approximation:

$$x_1(k+1) = x_1(k) - k_1\sqrt{x_1(k)} + k_2(u(k) + w(k)) \qquad (10)$$

$$x_2(k+1) = x_2(k) + k_3\sqrt{x_1(k)} - k_4\sqrt{x_2(k)} \qquad (11)$$

$$y(k) = x_2(k) + v(k) \qquad (12)$$

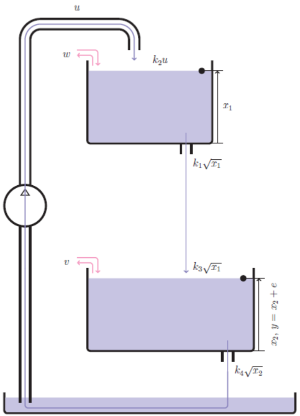

Figure: Tankmodell: schematische Darstellung

Studie am Tankmodell: Störungen

- ✓ MWN – mittelwertfreies, weißes Rauschen, keine Verletzung
- ✓ MPM – model-plant mismatch, Verletzung: 1

Studie am Tankmodell: iterative Modellstrukturauswahl

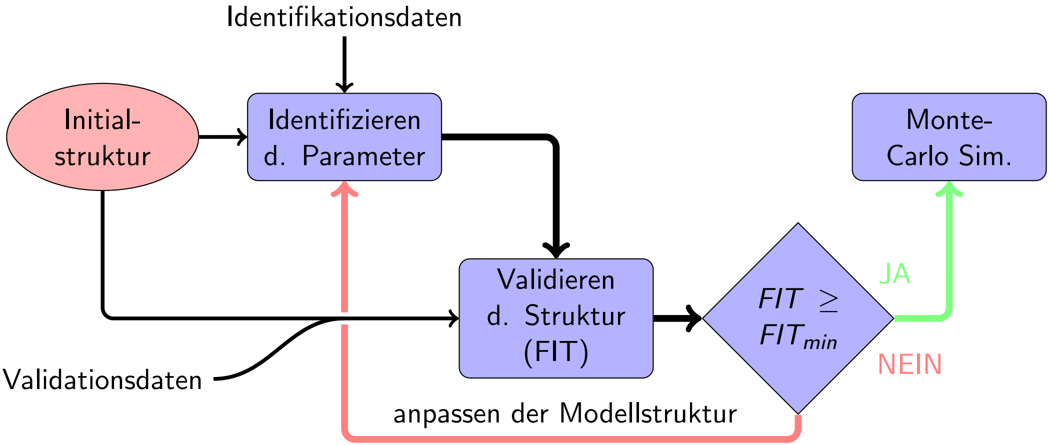

Figure: Ablaufdiagramm: iterative Modellstrukturauswahl

Studie am Tankmodell: Modellstruktur

Table: Modellstruktur des Tankmodells

Größe	Wert
Verzögerung Eingang: $n_{k,\,u}$	1
Verzögerung Ausgang: $n_{k,\,y}$	1
Modellordnung bez. Eingang: n_b	1
Modellordnung bez. Ausgang: n_a	1
Polynomgrad: p	3

Studie am Tankmodell: Ergebnis, Störung: MWN

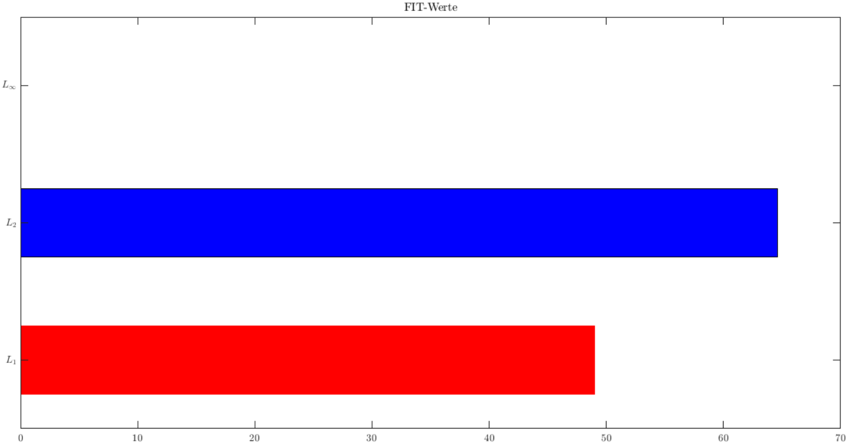

Figure: grafische Gegenüberstellung: über $n = 20$ Validationen gemittelte FIT- Werte

Zusammenfassung

Table: Zusammenfassung der Simulationsergebnisse

	MWN	WN	CN	MWN + Peak	Strukturabw.
	FIR / AR	FIR / AR	FIR / AR	FIR / AR	
L_1	$\checkmark$	$\checkmark$ / $\times$	$\checkmark$ / $\times$	$\checkmark$	$\times$
L_2	$\checkmark$	$\checkmark$ / $\sim$	$\checkmark$ / $\sim$	$\checkmark$	$\sim$
L_∞	$\times$ / $\sim$	$\sim$ / $\checkmark$	$\checkmark$	$\times$	$\times$

Danke für Ihre Aufmerksamkeit!