

# Zeitoptimale Regelung eines Viertelfahrzeugs (Labormodell)

Andreas Mittermair

Betreuer: DI Thomas Schwarzgruber

9.10.2014



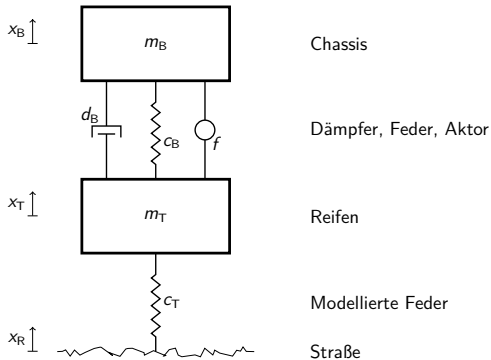
- 1 Problemstellung
- 2 Modellbildung
- 3 Analytische Optimierung
- 4 Weitere Optimierungsansätze
- 5 Vergleich und Fazit



- Bestimmung des zeitoptimalen Eingangs des Viertelfahrzeugs
- Kostenfunktion bzw. Hamiltonian dazu ist Funktional  
⇒ Ableitungen schwierig
- Systemklasse ist entscheidend
- Auslegung der optimalen Regelung mittels
  - Hamilton Jacobi Theory
  - Pontryagin's Maximum Principle

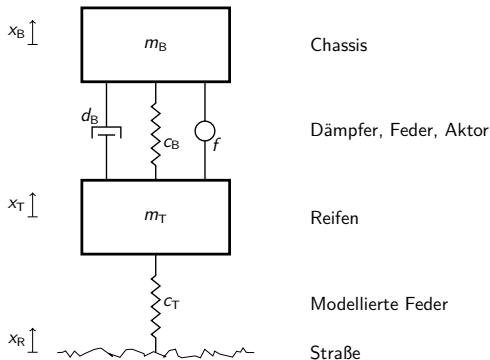


- Zwei-Massenschwinger
- Bis auf AP-Verschiebung linear
- Parameter bekannt





- Zwei-Massenschwinger
- Bis auf AP-Verschiebung linear
- Parameter bekannt



Form des System:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u \quad (1)$$

bzw.

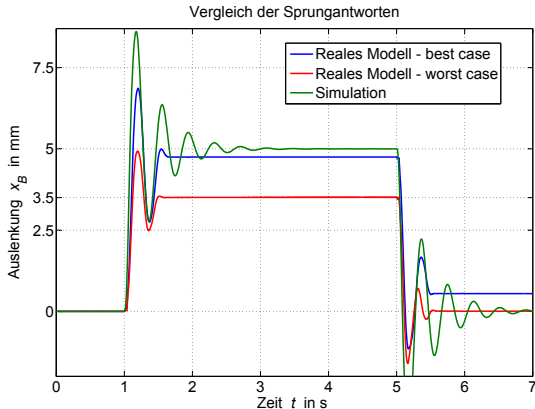
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad (2)$$

MIMO System:

- $u_1 = f$
- $u_2 = x_T$  (measured disturbance)



- Validation der Systemgleichungen am realen Modell
- Erhebliche Abweichungen
  - Dämpfung → Identifikation
  - Haftreibung → Nichtlinearität

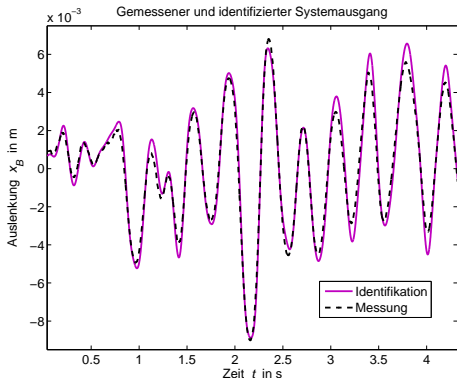




- Datenbasierte Modellbildung
- lineares MIMO Modell
- **Grey-Box** Identifikation in MATLAB
- Anregung: Weißes Rauschen

## Ergebnisse

- FIT: 75% – 85%
- FPE  $\approx 10^{-12}$



Haftreibung lässt sich durch ein lineares Modell nicht Modellieren



Kostenfunktion: 
$$J = \int_{t_0}^{t_f} dt \quad (3)$$

Hamiltonian: 
$$H = 1 + \boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (4)$$

- Anfangs- und Endzustände bekannt
- Endzeitpunkt unbekannt
- Beschränkung des Aktors  $f_{\max} = \pm 39 \text{ N}$





- Auswertung des Ausdrucks

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad (5)$$

und umformen auf  $u^*$

- Lösung der DGL

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H(\mathbf{z}, u^*, \boldsymbol{\lambda}, t) = 0 \quad \text{mit} \quad \frac{\partial V}{\partial \mathbf{z}} = \boldsymbol{\lambda} \quad (6)$$

## Lösung

Liefert **keine Lösung** da in  $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$  der Eingang  $u$  nicht mehr vorkommt  
 $\Rightarrow$  bedingt durch Systemklasse



- Auswertung des Ausdrucks

$$\dot{\lambda} = - \left( \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right)^\top \quad (7)$$

- Bedingung für optimales  $u^*$  aus

$$H(\mathbf{x}^*, u^*, t, \lambda_0, \lambda^*) \leq H(\mathbf{x}^*, u, t, \lambda_0, \lambda^*) \quad (8)$$

- **Bang-Bang Lösung** aufgrund der Systemklasse

$$\Rightarrow u^*(t) = \begin{cases} +f_{\max} & \forall \lambda_x < 0 \\ -f_{\max} & \forall \lambda_x > 0 \end{cases} \quad \text{mit } \lambda_x = \frac{\lambda_2}{m_B} - \frac{\lambda_4}{m_T} \quad (9)$$



- Bestimmung der **AB und RB** für das Hilfssystem
- Hilfssystem zwar linear, aber analytische Lösung umfangreich



- Bestimmung der **AB und RB** für das Hilfssystem
- Hilfssystem zwar linear, aber analytische Lösung umfangreich

## Abhilfe

- Satz von Feldbaum
  - Eigenwerte des Systems entscheidend
- Ausgehend von Bang-Bang-Variante Systemgleichungen lösen



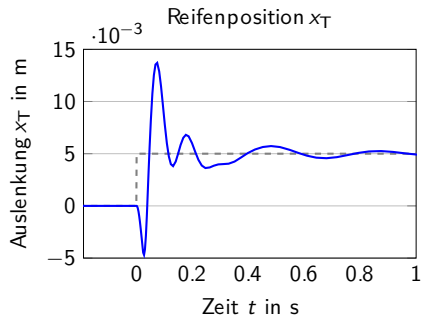
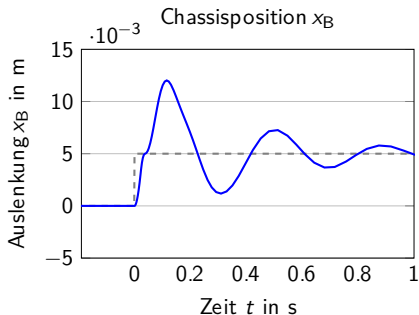
- Lösung anschreiben

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t_f) = & \Phi(t_f)\mathbf{x}_0 + \int_0^{t_1} \Phi(t_f - \tau)\mathbf{b}u(0)d\tau + \int_{t_1}^{t_2} \Phi(t_f - \tau)\mathbf{b}(-1)u(0)d\tau + \\ & + \dots + \int_{t_{n-1}}^{t_f} \Phi(t_f - \tau)\mathbf{b}(-1)^{n-1}u(0)d\tau \end{aligned} \quad (10)$$

- Annahme für den initialen Eingang  $u(0)$
- Anzahl der Umschaltzeitpunkte  $n$  nicht bekannt
- Lösung nur numerisch sinnvoll
- “Lösen“ durch optimieren in MATLAB



## Ein Umschaltvorgang



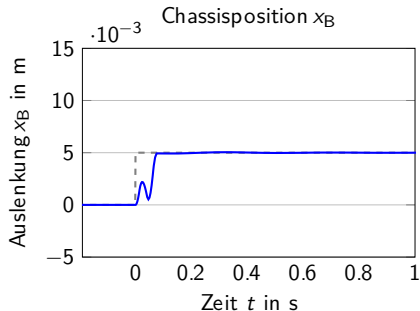
- Entspricht nicht den Erwartungen

$$t_1^* = 22.66 \text{ ms}$$

$$t_f^* = 37.78 \text{ ms} \quad (11)$$

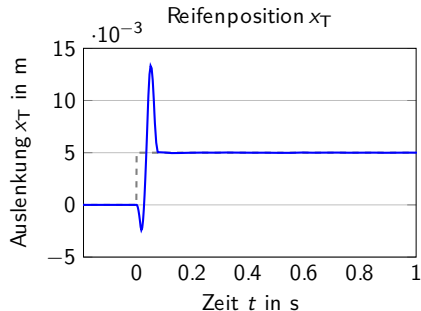


## Drei Umschaltvorgänge



$$t_1^* = 13.82 \text{ ms}$$

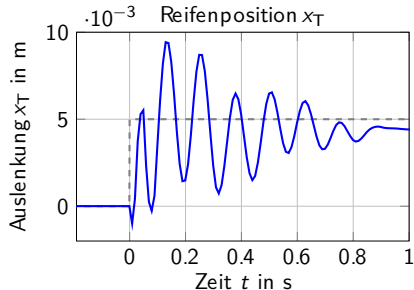
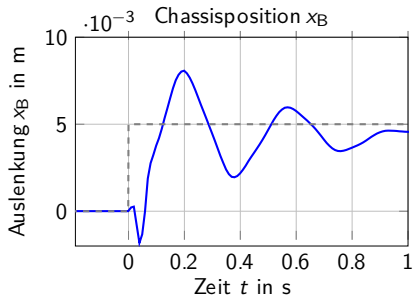
$$t_2^* = 41.11 \text{ ms}$$



$$t_3^* = 62.92 \text{ ms}$$

$$t_f^* = 76.85 \text{ ms} \quad (12)$$

- Keine Verbesserung bei mehr Umschaltzeitpunkten



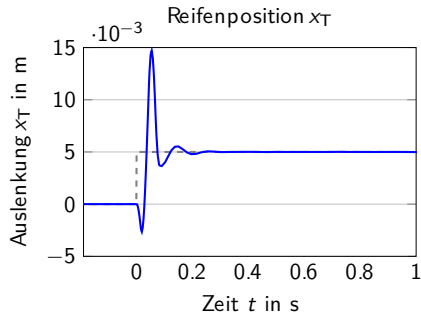
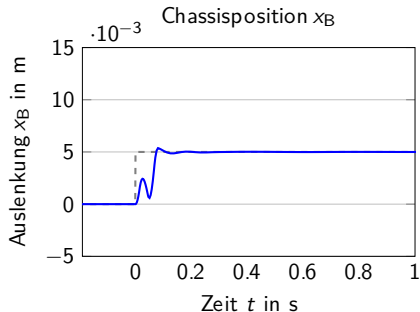
## Resultat

- Schaltintervalle sehr klein
- Haftreibung sorgt für große Abweichungen
- Sehr genaues mathematisches Modell notwendig
- Nicht robust gegenüber Modellabweichungen





- Bestimmung der Umschaltzeitpunkte mittels
  - gradientbasierten Verfahren
  - genetischen Algorithmen
- Kostenfunktionen sehr flach
- Liefert schnell Ergebnis
- Optimierung immer nur für einen bestimmten Fall gültig
- Durchgeführt in MATLAB
  - fmincon
  - ga



## Resultat

$$t_1^* = 14.677 \text{ ms}$$

$$t_3^* = 67.184 \text{ ms}$$

$$t_2^* = 44.055 \text{ ms}$$

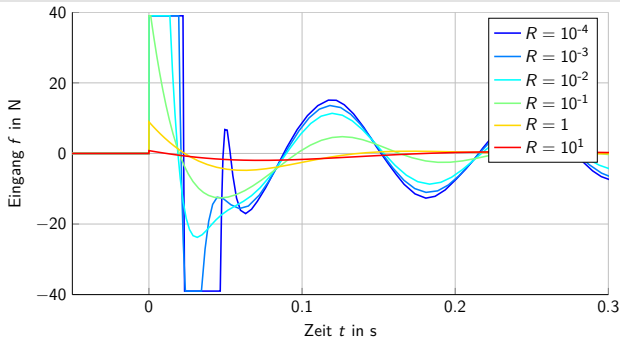
$$t_f^* = 81.328 \text{ ms} \quad (13)$$



## Idee

Bisherige Ansätze open loop → Am realen Modell **closed loop** sinnvoll

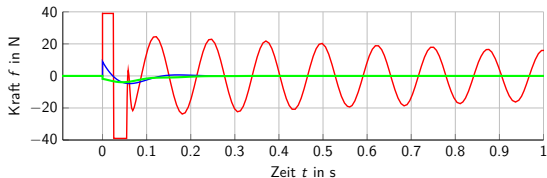
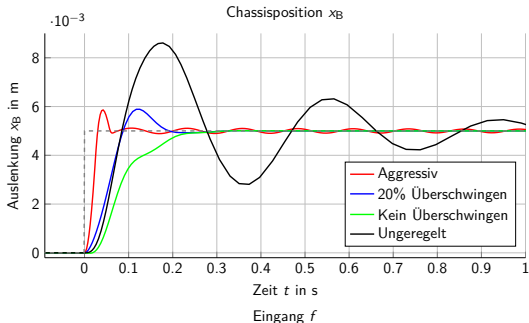
- Extrem niedrige Gewichtung des Eingangs:  $R \approx 0$
- Nachgeschaltene Beschränkung des Eingangs ⇒ Bang–Bang Lösung
- Robuster wegen Zustandsrückführung

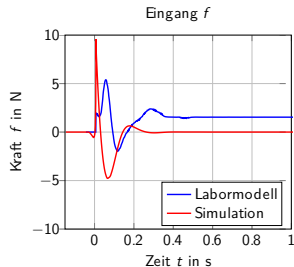
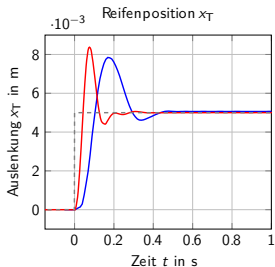
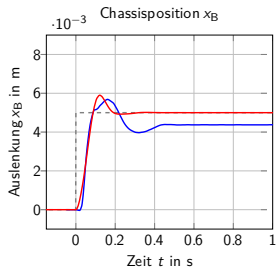




## Simulation

- Drei grundlegend verschiedene Auslegungen
- Idee: Haftreibung verhindert Schwingungen am realen Modell
- Extrem Aggressive Auslegung für Bang-Bang-artige Lösung





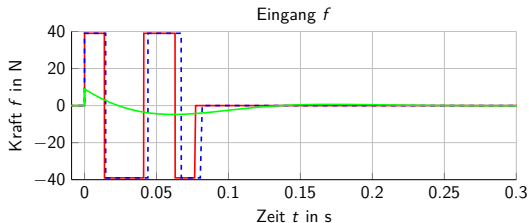
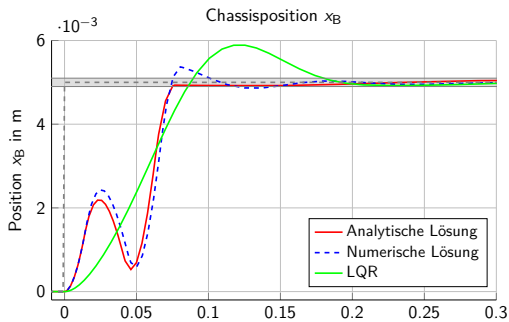
## Resultat

- Nur wenig aggressive Auslegung möglich
- Bleibende Regelabweichung
- Langsamer als in Simulation



## Simulation

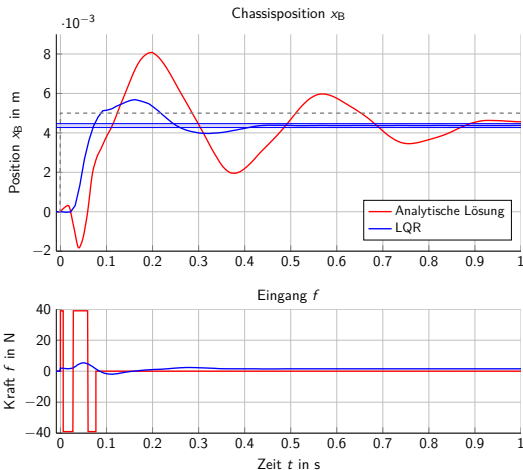
- Bewertung:  
Toleranzband um  
Endwert
- Analytische Lösung am  
schnellsten
- LQR nutzt Aktor kaum  
aus





## Reales Modell

- Open-loop-Lösung zeigt keine Wirkung
- LQR aufgrund der Zustandsrückführung besser
- Deutlich langsamer als in Simulation





## Auslegung

- Analytische Lösung sehr aufwändig
- Numerische Lösung einfacher, aber beschränkt
- LQR mit etwas Erfahrung rasch ausgelegt
- **Analytische Lösung** in Simulation **am schnellsten**

## Anwendung

- Open-loop-Ansätze brauchen sehr genaues Modell
- Reales Modell macht Modellbildung schwierig
- LQR regelt tatsächlich – Bang-Bang ist nur Steuerung
- Am realen Modell nur **LQR sinnvoll**



**Institute for Design and Control of Mechatronical Systems  
Johannes Kepler University Linz**

<http://desreg.jku.at>

