# Masterarbeit

# Generierung und Analyse verschiedener DOE-Ansätze anhand polynomialer Modelle

**Autor:** Daniel Polaschek

**Betreuer:** Univ.-Prof DI Dr. Luigi del Re
Dr. Harald Waschl
DI Patrick Schrangl

**Fertiggestellt:** Juni 2016

## Kurzfassung

In der Ingenieurswissenschaft ist es oftmals notwendig, ein datenbasiertes Modell eines realen Systems zu erstellen. Ein wichtiger Aspekt dieser System-Identifikation ist es, für die anschließende Modellierung über Datensätze zu verfügen, welche größtmöglichen Informationsgehalt über das zu identifizierende System enthalten.

In diesem Kontext wird die Generierung von A-, D- und E-optimalen Eingangssequenzen für die Parameterschätzung polynomialer Modelle untersucht, sowie deren Eigenschaften betrachtet. Dazu wird ausführlich auf die zu Grunde liegende Theorie dieser Optimierungsprobleme eingegangen, sowie die daraus im Zuge dieser Arbeit entstandenen Generatoren solcher optimaler Designs beschrieben. Auch auf die anschließend notwendige Verifikation der von diesen Generatoren berechneten Ergebnisse unter Verwendung der zugehörigen Äquivalenztheoreme wird eingegangen.

Weiters wird ihre Auswirkung auf eine mittels Least-Squares-Verfahren durchgeführte Parameterschätzung mit Hilfe der daraus resultierenden Konfidenzellipsoide untersucht.

## Motivation

Häufig wird zur Modellierung realer Systeme die Klasse der polynomialen Modelle verwendet, um das Systemverhalten mathematisch zu beschreiben. Diese bieten wegen ihrer Linearität bezüglich der Parameter

$$y_k = \boldsymbol{\varphi}_k^T \boldsymbol{\Theta}$$
$$\boldsymbol{\varphi}_k^T = (f_1(u_{1,k}, \dots, u_{r,k}) \dots f_{n_p}(u_{1,k}, \dots, u_{r,k}))$$

die Möglichkeit, das Least-Squares Verfahren für die Parameterschätzung zu verwenden.

$$\boldsymbol{\Theta} = (\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi})^{-1} \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{Y}$$

Als eine Folge von Messunsicherheiten bei der Aufnahme der Identifikationsdatensätze ergeben sich bei dieser Schätzung jedoch Unsicherheiten der daraus identifizierten Parameter. Unter der Annahme von Gauß'schem weißen Rauschen mit der Varianz $\sigma^2$ als Fehlermodell, sind diese Parameterunsicherheiten durch die Kovarianzmatrix

$$\mathbf{P} = \sigma^2 (\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi})^{-1}.$$

beschrieben. Ziel dieser Arbeit ist es, diese Unsicherheiten durch geschickte Wahl der Eingänge bei der Messung zu minimieren.

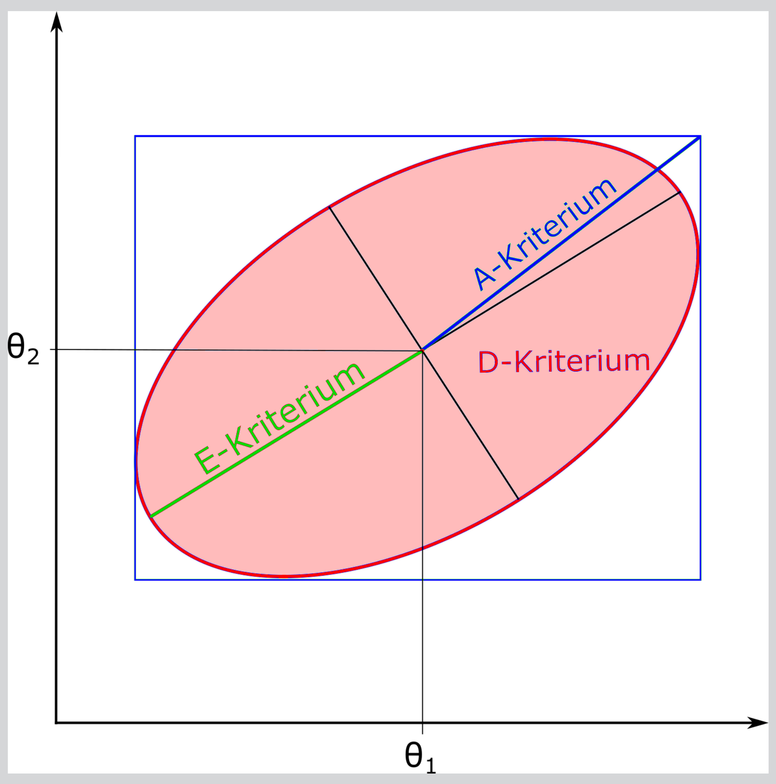
## Lösung

Mit Hilfe der Kovarianzmatrix $\boldsymbol{P}$ ist es möglich, Vertrauensbereiche der Parameterschätzung in Form von Konfidenz-Ellipsoiden zu konstruieren. Diese stellen Bereiche im Parameterraum dar, welche zu einer gewählten Wahrscheinlichkeit die gesuchten Systemparameter enthalten. Um diese Vertrauensbereiche zu minimieren, sollen die Amplituden der experimentellen Eingangssequenz $\boldsymbol{u}$ so gewählt werden, dass gewisse skalare Kennwerte von $\boldsymbol{P}$ optimiert werden.

$$\boldsymbol{u}^* = \arg\min \Psi(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{u}))$$

Im Rahmen dieser Arbeit wurden dazu die folgenden 3 Kriterien behandelt:

- A-Kriterium: $\Psi(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{u})) = \mathrm{trace}(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{u}))$
  Durch die Minimierung der Kovarianzmatrix-Spur wird der Durchschnitt der Halbachsenlängen des Konfidenzellipsoids minimiert.
- D-Kriterium: $\Psi(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{u})) = \det(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{u}))$
  Eine Minimierung der Determinante führt zu Konfidenzellipsoiden mit kleinstem Volumen.
- E-Kriterium: $\Psi(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{u})) = \max \lambda(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{u}))$
  Mit der Minimierung des größten Eigenwerts wird die größte Parameterunsicherheit optimiert.

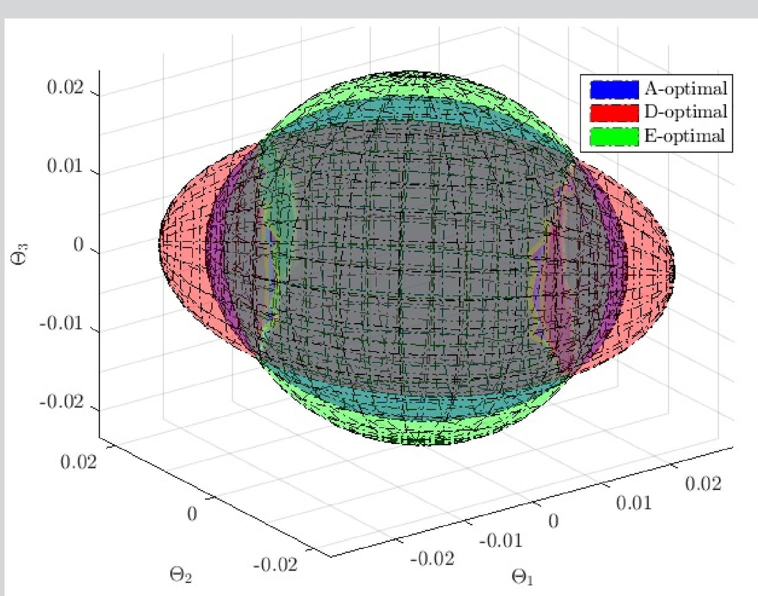



Im Bild links sind die Auswirkungen der oben angegebenen Optimierungskriterien beispielhaft für ein System mit zwei geschätzten Parametern $\Theta_1$ und $\Theta_2$ dargestellt.
Zur Lösung der Optimierungsprobleme wurde unter anderem die Theorie der approximativen Designgenerierung des optimalen *Design of Experiments* (*DOE*) angewendet. Hierbei wird die kompakte Menge der möglichen Eingangsbereiche diskretisiert, und über den zugehörigen Regressionsvektor $\boldsymbol{\varphi}$ in den Regressorraum abgebildet. In diesem können nun Gewichte $w_i \geq 0$ für jeden einzelnen dieser diskreten Eingangspunkte berechnet werden, welche angeben, mit welcher relativen Häufigkeit dieser Eingangspunkt in der, nach einem der oben genannten Kriterien optimierten, experimentellen Eingangssequenz vorkommen soll. Dieses Vorgehen liefert ein sogenanntes *Design* $\boldsymbol{\xi}$, in welchem die $m$ optimalen Eingangsamplituden mit ihrem zugehörigen optimalen Gewicht in der Eingangssequenz zusammengefasst sind.

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_m \\ w_1 & \cdots & w_m \end{pmatrix}$$

Die hier entstandenen Design-Generatoren nutzen zusätzlich eine eigens angefertigte Preprocessing-Methode, welche nicht in Frage kommende Eingangsamplituden vor der Optimierung entfernt. Dadurch lässt sich die Laufzeit der Optimierungsalgorithmen oft deutlich senken.
Um die optimierten Designs zu verifizieren, wurden eigene Methoden für deren Effizienzberechnung implementiert. Auch die notwendige Eingangssequenz-Generierung aus den optimierten Designs wurde durch Funktionen automatisiert.

## Ergebnisse

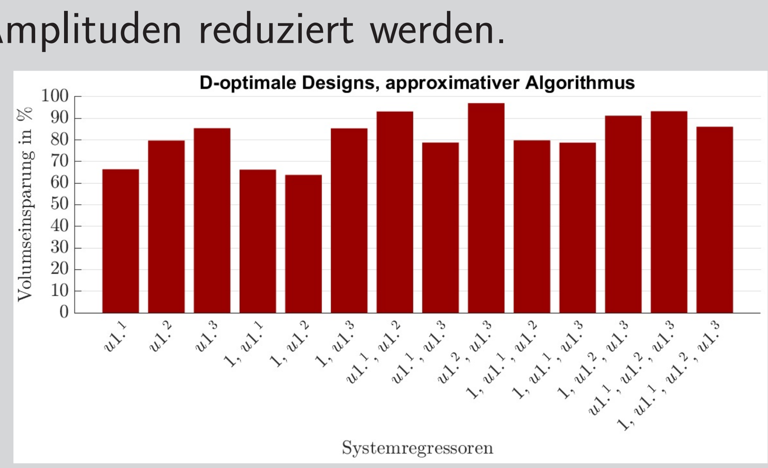



Nebenstehende Grafik zeigt die für ein Beispielsystem

$$y_k = \Theta_1 u_{1,k}^2 + \Theta_2 u_{2,k}^2 + \Theta_3 u_{1,k} u_{2,k} + \nu_k$$
$$\nu_k \in \mathcal{N}(0, 0.01)$$

berechneten 95%-Konfidenzellipsoide der verschiedenen Optimalitäten. Dies bedeutet, dass 95% der damit konstruierten Konfidenzintervalle die tatsächlichen Systemparameter enthalten.
Es ist zu erkennen, dass die generierten Eingangssequenzen die jeweiligen Optimierungsvorgaben erfüllen. Weiters konnten die Standardabweichungen der einzelnen Parameter mit den optimalen Eingangssequenzen um ca. 40% gegenüber einer Eingangssequenz mit gleichverteilten Amplituden reduziert werden.

Das rechtsstehende Diagramm zeigt die Volumseinsparungen in Prozent für SISO-Systeme unterschiedlichen Grades. Dabei wird der jeweils D-optimale Eingang mit einer Eingangssequenz verglichen, welche alle diskreten Amplituden enthält. Auch hier zeigen sich die Vorteile einer Verwendung von optimierten Eingangssequenzen bei der Parameteridentifikation.




## Zusammenfassung & Ausblick

- Implementierung verschiedener Algorithmen für die A-, D- und E-optimalen Designs für die Klasse der polynomialen Modelle mit und ohne Eingangsdynamik.
- Verifikationsmethoden zur Effizienzanalyse der erstellten Designs.
- Generierung der optimierten Eingangssequenzen und Analyse ihrer Auswirkungen auf die Streuungen der mittels LS-Verfahrens geschätzten Parameter.
- mögliche Erweiterungen
  - Ausweitung der Funktionalitäten auf komplexere Modellklassen
  - Testen weiterer Preprocessing-Methoden für das Optimierungsproblem
  - Anwenden der Ergebnisse im Bereich der Regressorselektion oder robusten Regelung