Masterarbeit
Echtzeitoptimierung mit Extremum Seeking

Autor: Martin Großbichler

Betreuer: Prof. Luigi del Re
Dr. Harald Waschl

Fertiggestellt: Oktober 2015

Kurzfassung

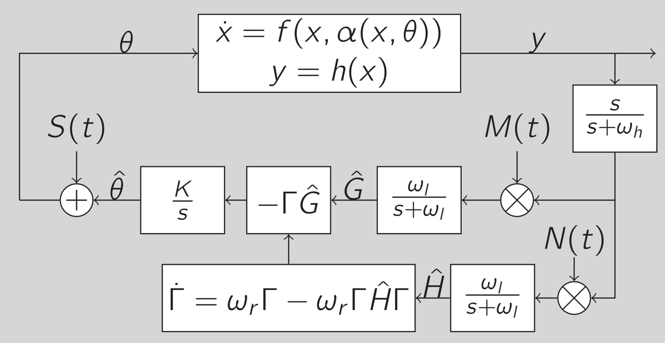
Extremum Seeking (ES) ist eine Methode zur Echtzeitoptimierung von Systemen. Die Idee besteht darin, eine statische Optimierungsaufgabe als Regelkreis zu formulieren. Die Kostenfunktion wird dabei als System betrachtet und die zu optimierenden Parameter als die entsprechenden Eingänge. Der Regelfehler wird als Abstand zum optimalen Parameterwert definiert, wobei dieser jedoch von vornherein unbekannt ist und durch das Verfahren selbst gefunden werden muss. Somit erfordert ein derartiger Algorithmus keine a priori Information über das System sondern ermittelt diese selbst aus Messungen.

Nach einer Analyse der klassischen Ansätze wird in dieser Arbeit konkret auf einen Algorithmus eingegangen, welcher auf einer Newton-Methode (NB-ES) basiert. Die Verwendung eines Newton-Verfahrens stellt jedoch auch gewisse Bedingungen an die Kostenfunktion, welche strikt konvex sein muss, da ansonsten keine Abstiegsrichtung gefunden werden kann. Weiters führt der vorgeschlagene NB-ES Algorithmus im Falle von singulären Hesse Matrizen zu einem instabilen Regelkreis. Darum wird in dieser Arbeit vorgeschlagen eine Matrix-Regularisierung zu verwenden, um den Regelkreis robuster gegenüber indefiniten bzw. singulären Hesse Matrizen zu machen.

Die Funktionalität dieses robustifizierten Newton-basierten Extremum Seeking Reglers (rNB-ES) wird anhand von Simulationen und einer realen Anwendung an einem Diesel-Motor validiert. Die Vorteile gegenüber einem klassischen Gradienten- (GB-ES) bzw. NB-ES Algorithmus bezüglich Stabilität, Konvergenz-Geschwindigkeit und Aufwand der Parametrierung überwiegen und werden veranschaulicht.

Newton-basiertes Extremum Seeking

Die Konvergenz eines GB-ES hängt, wie man im *Averaged System* erkennt, von der 2. Ableitung f'' bzw. der Hesse Matrix H ab. Ein multivariables NB-ES eliminiert diese Abhängigkeit durch verwenden eines Schätzwertes $\hat{H}$ für H.

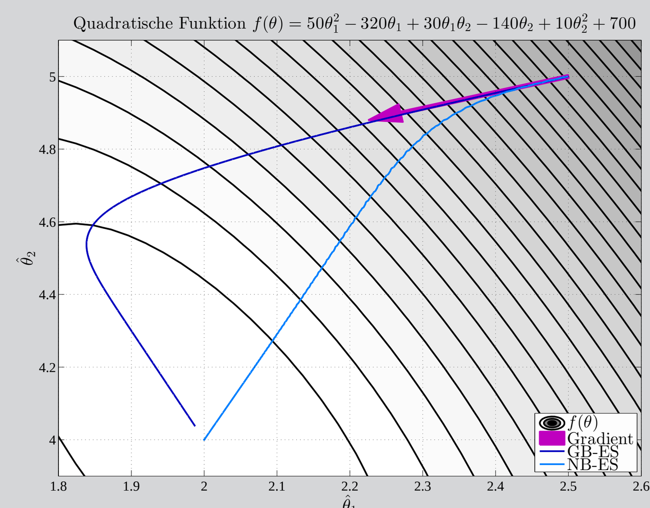


Das allgemeine nichtlineare System selbst sei stabil oder beinhaltet ein stabilisierendes Regelgesetz $u = \alpha(x,\theta)$. Die Schätzwerte für Gradient $\hat{G}$ und Hesse Matrix $\hat{H}$ werden durch Demodulation mit geeigneten $M(t)$ und $N(t)$ berechnet. Die Schätzwerte $\hat{G}$ und $\hat{H}$ approximieren damit im Mittel die wahren Werte. Die sinusförmigen Störsignale sind im Vektor $S(t)$ zusammengefasst.

Die Invertierung der Hesse Matrix übernimmt ein Riccati Filter $\dot{\Gamma} = \omega_r(\Gamma - \Gamma\hat{H}\Gamma)$, welches aus $\hat{H}$ direkt einen gefilterten Schätzwert Γ der inversen Hesse Matrix $\hat{H}^{-1}$ berechnet. Dadurch wird berücksichtigt, dass der Mittelwert und nicht der Momentanwert von $\hat{H}$ die tatsächliche Hesse Matrix H approximiert. Durch Integration des Update-Gesetzes $-\Gamma\hat{G}$ wird eine Veränderung in Newton-Richtung für den Parametervektor $\hat{\theta}$ erzielt.

Dieses Verfahren ist ebenfalls lokal exponentiell stabil und Instabilitäten durch kurzzeitig negativ definite oder indefinite Schätzwerte $\hat{H}$ der Hesse Matrix werden durch das Riccati Filter gedämpft.

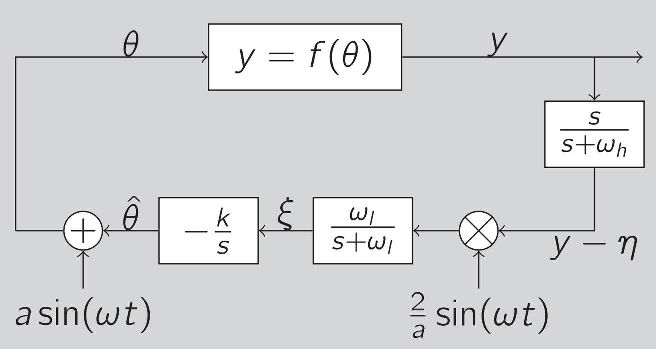
Im Gegensatz zum GB-ES verwendet das NB-ES, nach Konvergenz des Hesse Matrix Schätzers, eine Newton-Richtung und erzielt vor allem in flachen Bereichen der Kostenfunktion eine schnellere Konvergenz.



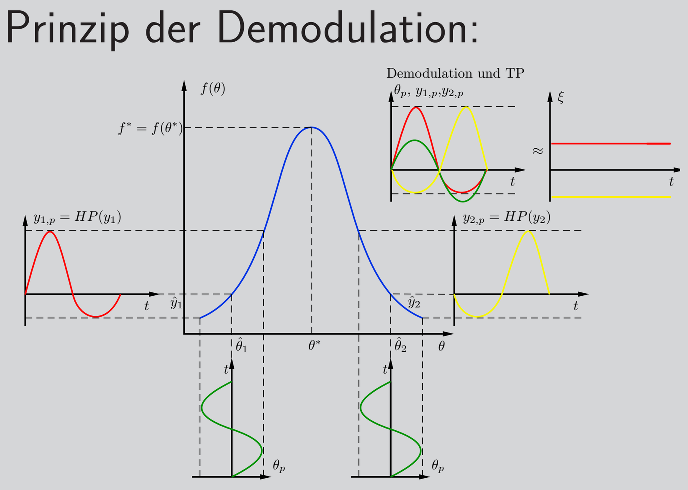
Mit dieser Methode treten jedoch Stabilitätsprobleme bei singulärer Hesse Matrix auf, da die lokale Stabilität des Riccati Filters nicht mehr gegeben ist. Ebenfalls ist bei indefiniter Hesse Matrix, welche bei einer nicht konvexen Funktion auftreten kann, das Finden einer Abstiegsrichtung nicht möglich. Darum wird eine Erweiterung vorgeschlagen.

Einführung - Gradienten-basiertes Extremum Seeking

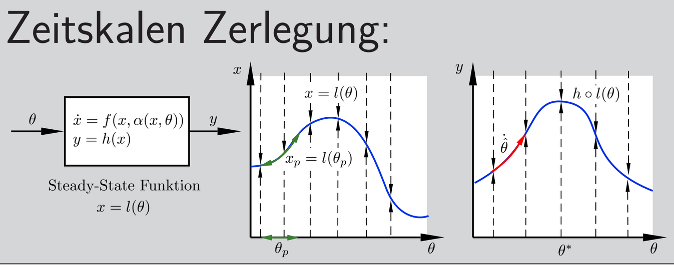
Ein GB-ES verwendet ein sinusförmiges Störsignal, welches in das unbekannte statische System $f(\theta)$ eingebracht wird. Durch anschließende Demodulation am Ausgang erhält man eine Information über den lokalen Gradienten der stationären Kennlinie des Systems.



Prinzip der Demodulation:



Zeitskalen Zerlegung:



Die Demodulation erzeugt einen Schätzwert ξ, welcher im Mittel den Gradienten approximiert. Durch Integration des negativen Wertes von ξ erhält man einen neuen Parameter $\hat{\theta}$, welcher gegen den optimalen Parameterwert θ^* konvergiert. Wird die unbekannte Funktion mit $y = f^* + \frac{f''}{2}(\theta - \theta^*)^2$ approximiert, so kann durch eine *Averaging Analyse* das zeitlich mittlere Verhalten des Fehlersystems $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta^*$ und $\tilde{\eta} = \eta - f^*$ wie folgt beschrieben werden:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\xi_{av}\\ \tilde{\theta}_{av}\\ \tilde{\eta}_{av}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\omega_l\left(-\xi_{av} + f''\tilde{\theta}_{av}\right)\\ -k\xi_{av}\\ \omega_h\left(-\tilde{\eta}_{av} + \frac{f''}{2}\left(\tilde{\theta}_{av}^2 + \frac{a^2}{2}\right)\right)\end{bmatrix} \quad (1)$$

Damit ist das GB-ES lokal exponentiell stabil und verhält sich wie ein Gradienten-Abstiegsverfahren.

Grundlegend dabei ist eine Trennung in 3 Zeitskalen, d.h. die Frequenz des Störsignals muss langsamer sein als die Systemdynamik selbst, wodurch dieses erst als statische Funktion $f(\theta)$ beschrieben werden kann. Die langsamste Zeitskala stellt der Integrator $\dot{\hat{\theta}}$ dar.

Regularisierung

Durch eine Matrix-Regularisierung kann aus einer singulären bzw. indefiniten Hesse Matrix $\hat{H}$ eine ähnliche positiv definite Matrix $\hat{H}_R$ erzeugt werden. Diese Matrix $\hat{H}_R$ wird anstelle von $\hat{H}$ mit dem Riccati Filter invertiert. Dadurch treten keine Stabilitätsprobleme auf und eine Abstiegsrichtung kann garantiert gefunden werden.

- Ansatz von Levenberg-Marquart (LM):

$$\hat{H}_R = \hat{H} + \eta I \quad (2)$$

mit geeignetem $\eta > 0$.

- Regularisierung basierend auf der spektralen Dekomposition (SD): $\hat{H}_R$ wird aus dem Eigensystem durch spiegeln der negativen Eigenwerte berechnet:

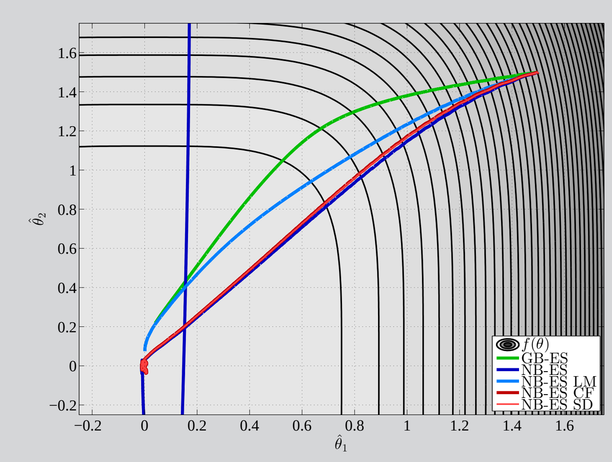
$$\hat{H} = V\Lambda V^T \quad (3)$$
$$\bar{\Lambda} = \max(\delta I, |\Lambda|) \rightarrow \hat{H}_R = V\bar{\Lambda}V^T \quad (4)$$

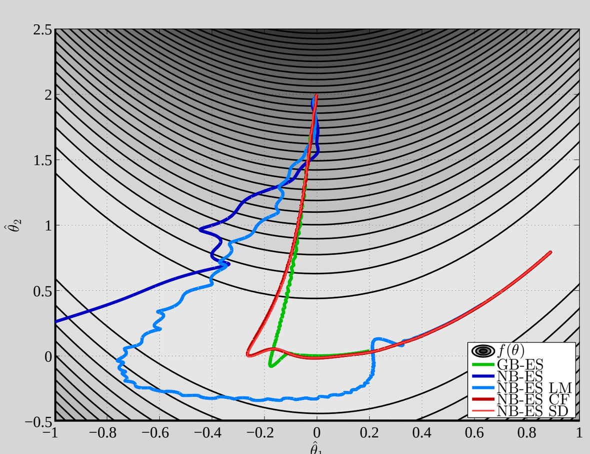
- Regularisierung basierend auf der Cholesky Faktorisierung (CF):

$$\hat{H}_R = L\bar{D}L^T = \hat{H} + \mathrm{diag}([\eta_1 \ \ldots \ \eta_n]) \quad (5)$$

Mit geeigneten $\eta_i > 0$ sodass alle $\bar{d}_{jj} > \delta > 0$ und $\left|\sqrt{\bar{d}_{ss}}\, l_{js}\right| < \beta > 0$ erfüllen.

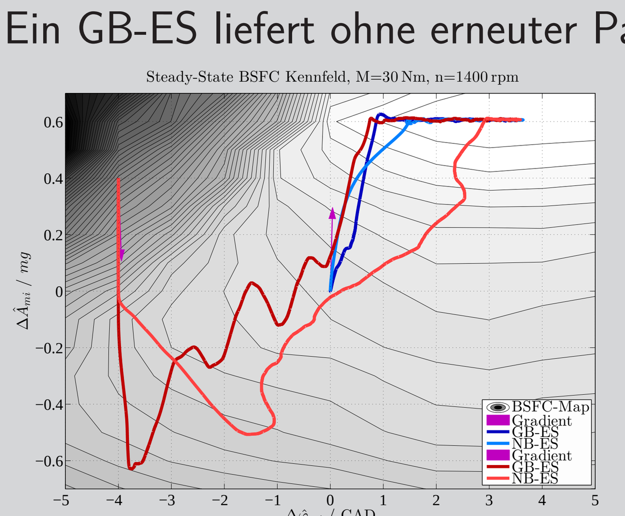
Unregularisierter NB-ES ist instabil bei singulärer und indefiniter Hesse Matrix:

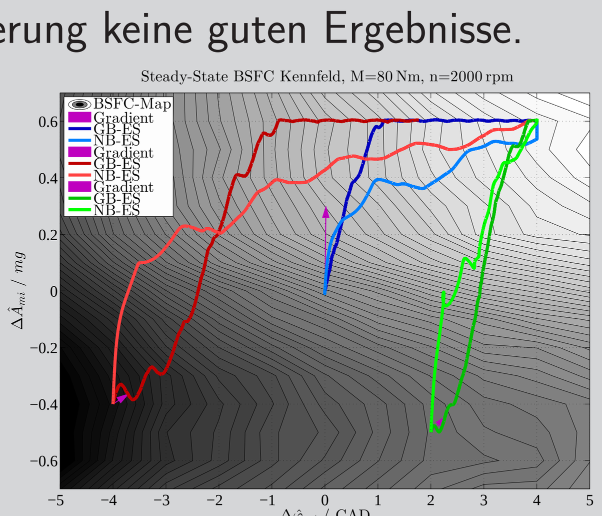


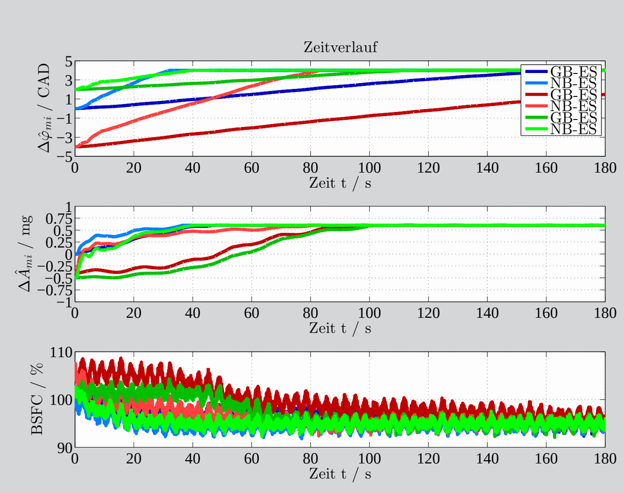


Experimentelle Ergebnisse

Um die Funktionalität des vorgeschlagenen rNB-ES zu veranschaulichen, wird eine Optimierung des spezifischen Kraftstoffverbrauchs eines Diesel-Motors vorgenommen. Dazu werden Drehmoment und Drehzahl konstant gehalten und die Menge der Haupteinspritzung A_{mi}, sowie der Einspritzwinkel φ_{mi} additiv verändert (ΔA_{mi},$\Delta\varphi_{mi}$) um ein Minimum zu finden. Dabei wird der rNB-ES mit einem klassischen GB-ES verglichen. Beide Verfahren werden in einem Betriebspunkt (M,n) derart parametriert, dass sie ähnliches Konvergenzverhalten zeigen. Anschließend wird der Vergleich in einem zweiten Betriebspunkt mit anderem stationären Verhalten durchgeführt. Dabei zeigt das rNB-ES klare Vorteile durch einfachere Parametrierung und schnellere Konvergenz unabhängig vom Betriebspunkt. Ein GB-ES liefert ohne erneuter Parametrierung keine guten Ergebnisse.







Zusammenfassung und Ausblick

Durch die Kombination eines NB-ES und der Methode der Matrix-Regularisierung kann ein rNB-ES erreicht werden. Dieser Algorithmus ist für die Anwendung an realen Strecken mit Messrauschen und nicht konvexen Kostenfunktionen geeignet und behält alle Vorteile eines Newton-Verfahrens, bezüglich Performance und Einfachheit der Parametrierung, bei. Damit kann, ohne a priori Systemwissen zu benötigen, ein stationäres Übertragungsverhalten optimiert werden.

Mögliche zukünftige Arbeiten sind:

- Erweiterung auf eine *Multi-Objective Optimization* mit möglicher Anwendung am Diesel-Motor um andere Größen wie z.B. Emissionen zu berücksichtigen.
- Anstelle der Regularisierung mit regelungstechnischen Methoden eine Stabilisierung für das Riccati Filter zu entwickeln, um einen robusten Algorithmus zu erhalten.